



# Estimación Robusta de Fugas vía una Transformación Fraccional Lineal

**Alexander Adrián Vázquez Alva**

Universidad Nacional Autónoma de México, Instituto de Ingeniería, Coordinación de Eléctrica y Computación. Ciudad Universitaria, Ciudad de México, México.

ORCID: 0009-0005-4285-2804

**Cristina Verde**

Universidad Nacional Autónoma de México, Instituto de Ingeniería, Coordinación de Eléctrica y Computación. Ciudad Universitaria, Ciudad de México, México.

ORCID: 0000-0001-8700-516X

Recepción: 11 de octubre de 2024.

Aceptación: 12 de noviembre de 2024.

Diciembre 2024 • número de revista 11 • <https://doi.org/10.22201/dgtic.26832968e.2024.11.46>

## Estimación Robusta de Fugas vía una Transformación Fraccional Lineal

---

### Resumen

Se abordó el problema de la identificación automática de una fuga en un ducto, usando un modelo novedoso integrado por una parte nominal y una incierta, la cual depende de los parámetros de la fuga. El modelo bien condicionado se logró utilizando una transformación lineal fraccional de la posición desconocida de la fuga, el cual, a su vez, simplificó la estimación de los parámetros usando un Filtro de Kalman Extendido. Resultados con datos sintéticos y experimentales mostraron el desempeño robusto del identificador de la fuga para un ducto hidráulico de 160 m de largo.

**Palabras Clave:** detección automática de fallas, modelo incierto transformado, estimadores dinámicos, localización de fugas en tiempo real

### *Robust Failure's Estimation by Linear Fractional Transformation*

---

#### **Abstract**

*A novel model with a nominal subsystem and one uncertain subsystem that depends on the leak parameters was considered to address the problem of automatic leak identification in a pipeline. The well-posed model was achieved using a linear fractional transformation of the unknown leak location. Moreover, the model simplified the parameter identification using an Extended Kalman Filter. Results obtained with synthetic and experimental data showed the robust performance of the leak identification procedure for a hydraulic pipeline of 160 m of longitude.*

**Keywords:** *automatic failures detection, transformed uncertain model, dynamic estimators, real time location of leaks.*

## 1. Introducción o antecedentes

Para la industria, ha resultado imprescindible el monitoreo, mantenimiento, rápida detección e identificación de fallas en redes de transmisión de fluidos, pues las consecuencias ante eventos anormales en estos sistemas van desde pérdidas monetarias, que han llegado hasta los \$800 millones USD [1], hasta daños irreversibles al ecosistema y a la salud pública.

En las últimas décadas, la comunidad científica e ingenieril ha abordado el problema de identificación y detección de fallas (FDI) de tres maneras: 1) Métodos basados en hardware, que requieren de la instalación de sensores sofisticados, como micrófonos, detectores de hidrocarburos, cámaras térmicas, instalación de fibra óptica, etcétera, que monitoreen permanentemente la hermeticidad exterior de la línea [1] [2]. 2) Métodos basados en software, que requieren de mediciones convencionales de presión, gasto y/o temperatura, para luego ser procesadas por modelos analíticos, que describen el comportamiento del fluido [3], y por *Data-driven*, que utilizan grandes bases de datos para generar predicciones [4].

Dentro de los métodos procesados por modelo, se pueden encontrar desde ecuaciones estáticas [5] hasta expresiones dinámicas complejas, con no linealidades y conjuntos de ecuaciones simultáneas [6]. Éstas últimas llegan a demandar muchos recursos de la computadora para su resolución numérica. En búsqueda de un consenso entre una FDI efectiva a través de un modelo simple y descriptivo, así como una adquisición de datos asequible, en el presente trabajo se propone transformar el modelo de balance de masa con una fuga en uno que sea fácilmente computable e identificable, permitiendo así una mejor modularidad con otras herramientas de estimación de parámetros.

En lo consiguiente, se presentará, en la primera sección, el modelo más simple para representar la dinámica del fluido con una sola fuga, para luego desarrollar la transformación lineal fraccional necesaria que permitirá descomponer el modelo original en una parte nominal y una con incertidumbres. La siguiente sección muestra la estructura novedosa del estimador de estado para la identificación de fallas y se destacan sus peculiaridades. Finalmente, se expone la eficacia del modelo a través de experimentos sintéticos en Matlab, así como experimentos con datos de una planta real.

## 2. Modelos del fluido

### a. Modelo nominal

Considere un ducto horizontal de sección transversal constante que transporta un fluido ligeramente compresible presurizado y con flujo turbulento, representado por el siguiente modelo diferencial de conservación de momento y de masa [7]

$$\frac{1}{a_1} \frac{\partial Q(z, t)}{\partial t} + \frac{\partial H(z, t)}{\partial z} + \frac{1}{a_1} \theta Q(z, t)^2 = 0 \quad (1)$$

$$a_2 \frac{\partial Q(z, t)}{\partial z} + \frac{\partial H(z, t)}{\partial t} = 0 \quad (2)$$

donde  $H$  es la carga de presión [ $m$ ],  $Q$  el gasto volumétrico [ $m^3 s^{-1}$ ],  $z$  es la coordenada longitudinal al ducto [ $m$ ],  $t$  es el tiempo [ $s$ ]; y las constantes  $a_1 = g A_r$  y  $a_2 = b^2 a_1^{-1}$ , donde  $g$  es la aceleración gravitatoria [ $m s^{-2}$ ],  $A_r$  es la sección transversal del ducto [ $m^2$ ], y  $b$  es la velocidad del sonido [ $m s^{-1}$ ]. Además,  $\theta = f/(2 D A_r)$ , donde  $f$  es el coeficiente de fricción Darcy Weisbach y  $D$  el diámetro interno del ducto. Cuando no se dispone de un valor preciso de la fricción, se sugiere estimarlo a partir de datos experimentales con la relación estática  $\theta = a_1 \Delta H / (L Q^2)$ , donde  $\Delta H$  es la diferencia de presión en los extremos del ducto de longitud  $L$  [ $m$ ].

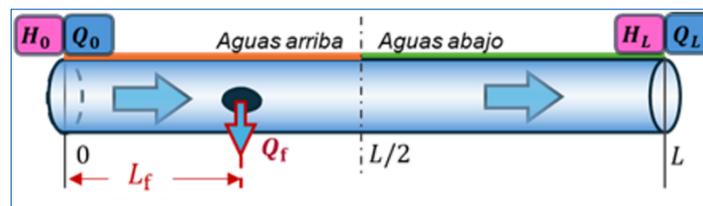


Fig. 1. Esquema de ducto con una fuga.

La descripción completa del modelo del fluido requiere establecer las condiciones de frontera del sistema, en este caso, se usan las presiones medibles en los extremos del ducto  $u(t) = [H_0(t) \ H_L(t)]^T$ , junto con los gastos  $y(t) = [Q_0(t) \ Q_L(t)]^T$ .

Considerando una sola fuga, de acuerdo con la propuesta de Verde [8], el modelo más simple para describir la dinámica del fluido dentro del ducto está dado por

$$\begin{aligned} \dot{Q}_0(t) &= \frac{a_1}{L_f} (H_0(t) - H_f(t)) - \theta Q_0^2(t), \\ \dot{H}_f(t) &= \frac{a_2}{L_f} (Q_0(t) - Q_L(t) - \lambda \sqrt{H_f(t)}), \\ \dot{Q}_L(t) &= \frac{a_1}{L - L_f} (H_f(t) - H_L(t)) - \theta Q_L^2(t), \end{aligned} \quad (3)$$

donde  $L_f$  es la posición de la fuga mostrada en la Fig. 1;  $H_f$  es la carga de presión en dicho punto [ $m$ ] y  $\lambda$  es el coeficiente de descarga [ $m^{5/2} s^{-1}$ ], asociado al orificio.

Definiendo los estados:  $x(t) = [Q_0(t) \ H_f(t) \ Q_L(t)]$ , el modelo (3) en forma matricial toma la estructura

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) - \Phi(x(t)) - F(x(t)), \quad (4)$$

con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-a_1}{L_f} & 0 \\ \frac{a_2}{L_f} & 0 & \frac{-a_2}{L_f} \\ 0 & \frac{a_1}{L - L_f} & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} \frac{a_1}{L_f} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{-a_1}{L - L_f} \end{bmatrix}; \quad \Phi(x(t)) = \theta \begin{bmatrix} x_1^2(t) \\ 0 \\ x_3^2(t) \end{bmatrix}; \quad F(x(t)) = \frac{1}{L_f} \begin{bmatrix} 0 \\ a_2 \lambda \sqrt{x_2(t)} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

en donde  $F(x(t))$  está asociada con la perturbación debida a la fuga.

## b. Modelo con Incertidumbres

Para poder abordar el diseño del localizador de fugas en el contexto de un sistema robusto, de acuerdo con Verde [8] es más conveniente describir (4) como un modelo nominal con la fuga a la mitad del ducto  $L_{f0} = L/2$ , junto con términos inciertos dependientes de la incertidumbre  $-1 < \delta < 1$ . De este modo, la posición de la fuga se representa como una desviación respecto a la mitad del ducto

$$L_f = L_{f0}(1 - \delta). \quad (6)$$

Como se ilustra en la Fig. 2, si la fuga se ubica en la sección 1, la desviación  $\delta$  tiene un valor positivo; por el contrario, la desviación es negativa en la sección 2.

Según lo señalado por Doyle [9], el término incierto se puede expresar usando una transformación fraccional lineal, como

$$\frac{1}{L_{f0}(1 \mp \delta)} = \frac{1}{L_{f0}} \left( 1 \pm \frac{\delta}{1 \mp \delta} \right). \quad (7)$$

Por tanto, definiendo las fracciones en términos de  $\delta$

$$\delta^- = \frac{\delta}{1 - \delta} \quad \text{y} \quad \delta^+ = -\frac{\delta}{1 + \delta}, \quad (8)$$

se obtienen las relaciones entre las fracciones

$$\delta^+ = \frac{-\delta^-}{1 + 2\delta^-} \quad \text{y} \quad \delta^- = \frac{-\delta^+}{1 + 2\delta^+}, \quad (9)$$

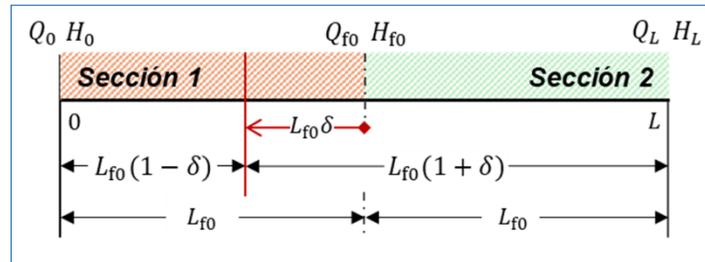


Fig. 2. Representación de la relación entre  $\delta$  con  $L_f$ .

las cuales permiten escribir el modelo (4) como

$$\dot{x} = A_0 x + B_0 u - \Phi(x) - F(x) + \Delta A^{\mp} x + \Delta B^{\mp} u - \Delta F^{\mp}(x). \quad (10)$$

con una parte nominal, bien planteada numéricamente con las matrices nominales  $A_0$  y  $B_0$  en función del parámetro conocido  $1/L_{f0}$ , y una parte incierta marcada en rojo que involucra los parámetros asociados a la incertidumbre, que pueden ser descritos con respecto a  $\delta^+$  o  $\delta^-$ . El superíndice  $\mp$  en este modelo indica que las matrices pueden evaluarse en términos de  $\delta^-$  o de  $\delta^+$  y, en particular, se tiene para la fracción  $\delta^-$ :

$$\Delta A^- = \frac{1}{L_{f0}} \begin{bmatrix} 0 & -a_1 \delta^- & 0 \\ a_2 \delta^- & 0 & -a_2 \delta^- \\ 0 & -\frac{a_1 \delta^-}{1+2\delta^-} & 0 \end{bmatrix}; \Delta B^- = \frac{a_1}{L_{f0}} \begin{bmatrix} \delta^- & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{\delta^-}{1+2\delta^-} \end{bmatrix}; \Delta F^-(x) = \frac{\lambda}{L_{f0}} \begin{bmatrix} 0 \\ a_2 \delta^- \sqrt{x_2} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

y para  $\delta^+$ :

$$\Delta A^+ = \frac{1}{L_{f0}} \begin{bmatrix} 0 & \frac{a_1 \delta^+}{1+2\delta^+} & 0 \\ -\frac{a_2 \delta^+}{1+2\delta^+} & 0 & \frac{a_2 \delta^+}{1+2\delta^+} \\ 0 & a_1 \delta^+ & 0 \end{bmatrix}; \Delta B^+ = \frac{1}{L_{f0}} \begin{bmatrix} -a_1 \delta^+ & 0 \\ 1+2\delta^+ & 0 \\ 0 & -a_1 \delta^+ \end{bmatrix}; \Delta F^+(x) = \frac{-\lambda}{L_{f0}} \begin{bmatrix} 0 \\ a_2 \delta^+ \sqrt{x_2} \\ 1+2\delta^+ \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Los modelos (4) y (10) son equivalentes, sin embargo, para tareas de control o estimación robusta, la representación (10) es más conveniente para manejar incertidumbres.

Si se comparan las matrices (11) y (12) en términos de  $\delta^-$  y  $\delta^+$ , se observa que hay una diferencia importante en la forma en que afecta la incertidumbre a los elementos de las matrices. En el caso de  $\Delta A^-$ , de los cuatro coeficientes en función de  $\delta^-$ , sólo uno es una función no lineal, mientras que los otros tres cuentan con coeficientes inciertos lineales. Para  $\Delta A^+$ , sólo uno de los coeficientes es lineal y tres no lo son, así que la convergencia en la identificación de  $\delta$  a través de  $\delta^+$  puede ser más lenta en ciertos escenarios.

### 3. Identificación de los parámetros de la fuga<sup>1</sup>

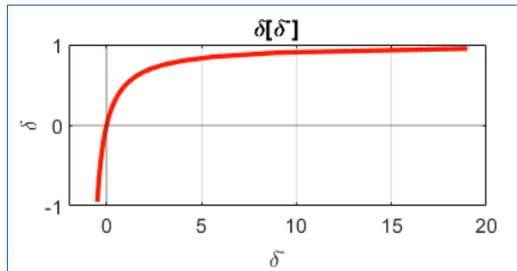
Cuando se desean identificar los parámetros del modelo (4), algunos autores [10] [11] [12] proponen un modelo de estado despreciando la dinámica de la  $x_2$ , argumentando que ésta es mucho más rápida que la de los otros estados. En el presente trabajo, se conservan los tres campos vectoriales, junto con los campos  $\delta^\mp = 0$ ,  $\lambda = 0$ . Esto permite reformular el problema de identificación como una tarea de observación para un sistema aumentado, con  $x_a^\mp = (x_1, x_2, x_3, \delta^\mp, \lambda)^T$ , el cual se puede escribir como

$$\dot{x}_a^\mp = A_a x_a^\mp + B_a u - \Phi_a(x_a^\mp) - F_a(x_a^\mp) + \Delta A_a^\mp x_a^\mp + \Delta B_a^\mp u - \Delta F_a^\mp(x_a^\mp) \quad (13)$$

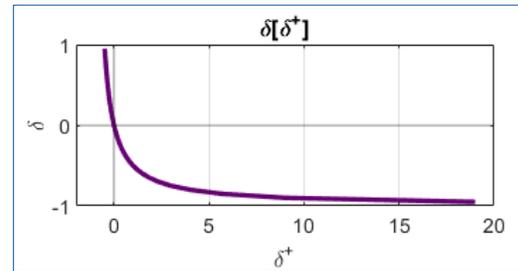
donde  $A_a = \begin{bmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $B_a = \begin{bmatrix} B_0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\Phi_a(x_a^\mp) = \theta \begin{bmatrix} \Phi(x_a^\mp) \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $F_a(x_a^\mp) = \begin{bmatrix} F(x_a^\mp) \\ 0 \end{bmatrix}$ ,

$\Delta A_a^\mp = \begin{bmatrix} \Delta A^\mp & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\Delta B_a^\mp = \begin{bmatrix} \Delta B^\mp \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\Delta F_a^\mp(x_a^\mp) = \begin{bmatrix} F^\mp(x_a^\mp) \\ 0 \end{bmatrix}$ , y 0 representa una matriz nula de dimensiones adecuadas.

<sup>1</sup> De este punto en adelante, para simplificar la notación, la dependencia del tiempo en los estados será implícita.



**Fig. 3.** Comportamiento de  $\delta[\delta^-]$



**Fig. 4.** Comportamiento de  $\delta[\delta^+]$

Antes de diseñar el observador para (13), un aspecto que conviene estudiar es la relación de  $\delta$  en términos de los estados  $\delta^\mp$ . Las Figs. 3 y 4 muestran claramente la antisimetría y la diferencia de las funciones que caracterizan a  $\delta$  en términos de los dos estados posibles. Si se selecciona  $\delta^-$  como estado, cuando  $\delta^- < 0$ , se tiene una pendiente muy grande y cualquier error pequeño del observador produce un gran cambio negativo en  $\delta$ . Por el contrario, cuando el estado  $\delta^- > 0$ , los errores del observador producen incrementos positivos moderados. Un escenario similar se puede ver en la Fig. 4 para la función  $\delta$  en términos  $\delta^+$ . Esta estimación de los estados  $\delta^\mp$  juega un papel importante en la respuesta transitoria cuando se desea identificar  $\delta$ , como es el caso que nos ocupa, ya que no se sabe de antemano el signo de este parámetro.

En conclusión, cualquier observador tendrá una convergencia más suave que el otro en función de la posición real, sobre todo para fugas en los extremos del ducto.

### a. Estimación vía el Filtro de Kalman Extendido

Uno de los estimadores más utilizados en ingeniería es el Filtro de Kalman (FK) para sistemas lineales debido a sus propiedades de robustez [13]. Su extensión al caso no lineal ha sido aplicada en diversos trabajos relacionados con la localización de fugas, así que se seleccionó la versión extendida del FK para localizar la fuga del modelo (13) con cinco estados y comparando los modelos fraccionales  $\delta^-$  y  $\delta^+$ . Para mayor detalle sobre el diseño del filtro, el lector puede consultar [14]. En el caso que nos ocupa, el algoritmo se reduce a calcular el estado estimado

$$\hat{x}_a^{\mp} = f(\hat{x}_a^{\mp}, u, t) + P^{\mp} C^T R^{-1} (y - C \hat{x}_a^{\mp}), \quad (14)$$

$$y = [x_1 \quad x_3]^T,$$

con  $f(\hat{x}_a^{\mp}, u, t)$  la función asociada al campo vectorial de (13) y donde las matrices  $P^{\mp}$  son la solución de la ecuación matricial de Riccati

$$\dot{P}^{\mp}(t) = (A_l^{\mp}(t) + I_5 \eta) P^{\mp}(t) + P^{\mp}(t) (A_l^{\mp}(t) + I_5 \eta)^T + Q - P^{\mp}(t) C^T R^{-1} C P^{\mp}(t), \quad (15)$$

con  $Q > 0$  y  $R > 0$  matrices asociadas con la covarianza del ruido en el estado y en la salida respectivamente,  $\eta > 0$  un factor que acelera la convergencia de la estimación, y las matrices  $A_l^{\mp}(t) = \partial f(\hat{x}_a^{\mp}, u, t) / \partial \hat{x}_a^{\mp}$  se obtienen a través del Jacobiano de (13) [15]. Para el estimador diseñado se seleccionó  $R = 0.1 I_2$ ,  $Q = \text{diag}[1, 10, 1, 200, 1]$ ,  $\eta = 0.01$ .

## 4. Análisis de Resultados

**Tabla 1. Parámetros del ducto hidráulico piloto**

$L$	164.73 [m]	$b$	1560 [m/s]
$D$	0.076 [m]	$\theta$	0.0158 [ $s^2 m^{-6}$ ]
$A_r$	$0.25 D^2 \pi$ [ $m^2$ ]	$g$	9.81 [ $m s^{-2}$ ]

### a. Experimento con datos sintéticos

El objetivo de este escenario fue demostrar la estimación correcta de la posición de fugas en ambas secciones del ducto cuando se diseña un FK extendido para el modelo parametrizado en  $\delta^{\mp}$ . Para ello, se utilizó como gemelo digital (13) con el parámetro  $\theta$  de la Tabla 1, asociado a una fricción equivalente. Se hace notar que la planta piloto tiene instalada una válvula estrangulada, la cual provoca una caída de presión de 16.15 [m], así que, en la simulación, se consideraron las presiones en los extremos de  $H_0 = 22$  [m] y  $H_L = 5.85$  [m] adicionadas con ruido blanco. Para mostrar el comportamiento de los estimadores  $\delta^{\mp}$ , se provocó una fuga a los 300 [s] de iniciada la simulación, a los 42.36[m] del origen del ducto, la cual se canceló a los 700 [s]. Posteriormente, a los 900 [s] se generó una nueva fuga localizada a los 122.36[m], la cual se eliminó a los 1400[s]. Este escenario se simuló considerando  $\lambda = 1.2 \times 10^{-4}$  [m<sup>5/2</sup> s<sup>-1</sup>] para ambas fugas.

La Fig. 5 muestra el comportamiento de las estimaciones durante la ventana de tiempo de la simulación. Se observan errores menores al 0.5% en las estimaciones del gasto ( $\hat{Q}_0$  y  $\hat{Q}_L$ ). Además, para la primera fuga, cuando la trayectoria de la estimación tiende al extremo aguas arriba, se logra aproximadamente un valor constante en 100 [s] con el estimador de  $\hat{\delta}^+$ , siendo más rápida la convergencia que con  $\hat{\delta}^-$ . Para la estimación de la segunda fuga, se observa un transitorio más rápido con  $\hat{\delta}^-$  respecto a  $\hat{\delta}^+$ , y converge en aproximadamente 110 [s]. Se hace notar que, en ausencia de fugas, el parámetro toma valores arbitrarios debido a que  $\hat{\lambda} = 0$ , y  $\hat{\delta}^+$  y  $\hat{\delta}^-$  tienen múltiples soluciones.

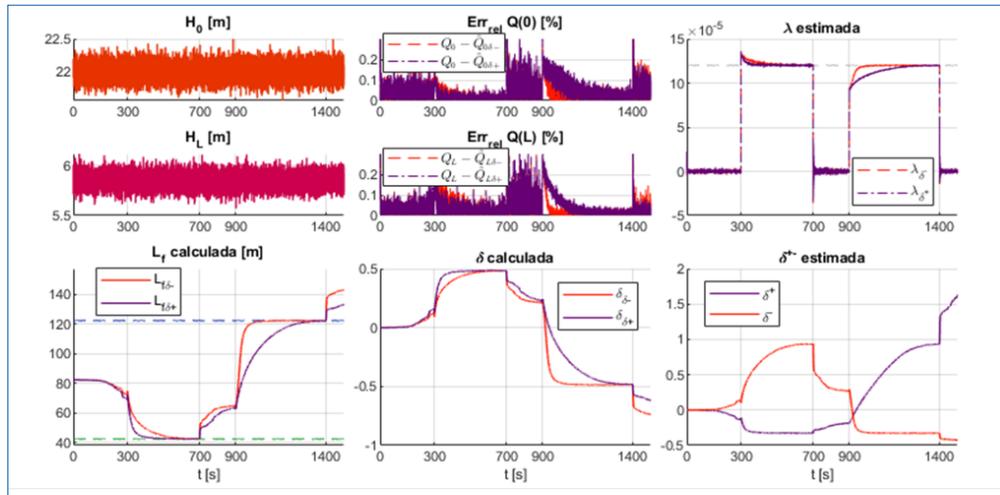


Fig.5. Evolución de la estimación de los parámetros con datos simulados.

## b. Experimentos con datos reales

Para validar el procedimiento propuesto, cuando se desea estimar la posición virtual de una fuga equivalente a dos fugas localizadas en  $L_{f1}$  y  $L_{f2}$ , se utilizó la relación estática

$$L_{f\text{apx}} \approx (L_{f1}Q(L_{f1}) + L_{f2}Q(L_{f2}))Q(L_f)^{-1} \quad (16)$$

reportada en [16], con  $Q(L_{f1})$  y  $Q(L_{f2})$  los gastos en estado estacionario. El experimento se realizó provocando dos fugas casi simultáneas en el ducto hidráulico piloto con parámetros físicos mostrados en la Tabla 1. La primera, ubicada en  $L_{f1} = 43.04$  [m], se provocó a los 300 [s], y la segunda, localizada en  $L_{f2} = 65$  [m], se activó a los 340 [s].

La Fig. 6 muestra tanto los datos reales muestreados cada 0.1 [s] de las condiciones de operación como los resultados al aplicar el FK Extendido con ambas estimaciones fraccionales,  $\delta^+$  y  $\delta^-$ . Con respecto al error de estimación relativo de los gastos, éste no supera el 8%. En ausencia de fuga, la posición  $L_f$  se mantiene a la mitad del ducto con  $\lambda = 0$ . A partir de la ocurrencia de la primera fuga, la posición virtual se desplaza y se ubica entre 50.6 [m] y 58.5 [m] después de 400 [s].

Por otro lado, registrando los datos de los gastos en los extremos del ducto y entre las posiciones de las dos fugas, se calcularon los valores medios de los gastos  $Q(L_{f1})$ ,  $Q(L_{f2})$  y la pérdida total  $Q(L_f) = Q(L_{f1}) + Q(L_{f2})$ . Así, aplicando (16) se obtuvo la posición equivalente  $L_{f\text{apx}} = 52.962$  [m]. Es decir, se tienen errores relativos aceptables entre 4.4% y 10.5% con la estimación usando el FK Extendido. Este resultado muestra el uso del algoritmo para estimar posiciones virtuales y abre una nueva oportunidad para abordar el problema de identificación robusta de múltiples fugas en un ducto.

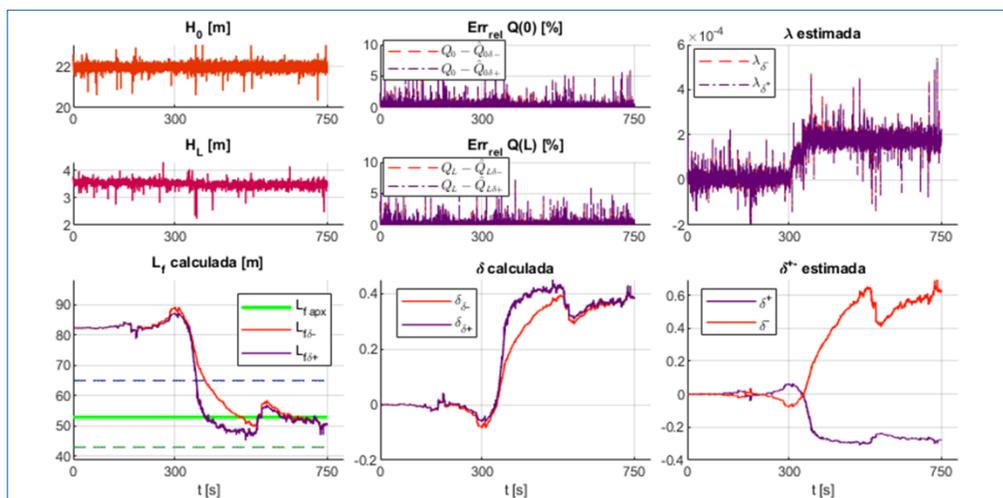


Fig.6. Evolución de la estimación de los parámetros con datos reales.

## 5. Conclusiones

En este trabajo, se estudió el problema de estimar una fuga en un ducto, aplicando una transformación lineal fraccional en la posición desconocida del modelo. La nueva descripción del modelo formado por una parte nominal y otra incierta mostró ser numéricamente mejor condicionado que los modelos considerados frecuentemente cuando se usa un Filtro de Kalman Extendido como estimador.

Para los dos ejemplos presentados con datos sintéticos y reales del ducto piloto, los tiempos de las estimaciones de la posición y coeficiente de descarga de la fuga fueron del

orden de 300 [s], siendo estos muy satisfactorios. Esta velocidad de respuesta del localizador abre una buena oportunidad para su empleo en problemas más complejos de múltiples fugas secuenciales y simultáneas donde el tiempo de detección es importante.

## Agradecimientos

Este trabajo fue financiado por CONAHCYT (No. CVU: 1315574) y la DGAPA UNAM PAPIIT-IT100424. Se agradece el soporte del M. Ing. Rolando A. Carrera durante la adquisición de los datos experimentales.

## Referencias

- [1] M. A. Adegboye, W.-K. Fung, y A. Karnik, «Recent advances in pipeline monitoring and oil leakage detection Technologies: Principles and approaches», *Sensors*, vol. 19, no. 11, p. 2548, jun. 2019, doi: [10.3390/s19112548](https://doi.org/10.3390/s19112548).
- [2] X. J. Wang, A. R. Simpson, M. F. Lambert, y J. P. Vítkovský, *Leak detection in pipeline systems using hydraulic methods: a review*. The Institution of Engineers, Australia, 2001. [En línea]. Disponible en: <https://search.informit.org/doi/epdf/10.3316/informit.524927473499176>
- [3] Z. Kowalczyk y K. Gunawickrama, «Detecting and Locating Leaks in Transmission Pipelines», en *Springer eBooks*, 2004, pp. 821-864. doi: [10.1007/978-3-642-18615-8\\_21](https://doi.org/10.1007/978-3-642-18615-8_21).
- [4] P.-S. Murvay y I. Silea, «A survey on gas leak detection and localization techniques», *Journal Of Loss Prevention In The Process Industries*, vol. 25, no. 6, pp. 966-973, may 2012, doi: [10.1016/j.jlp.2012.05.010](https://doi.org/10.1016/j.jlp.2012.05.010).
- [5] R. Carrera y C. Verde, «Localizador automático de fugas en un ducto», *Ingeniería Hidráulica En México*, vol. 16, no. 2, pp. 139-151, abr. 2001.

- [6] O. M. Aamo, J. Salvesen, y B. A. Foss, «OBSERVER DESIGN USING BOUNDARY INJECTIONS FOR PIPELINE MONITORING AND LEAK DETECTION», *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 39, no. 2, pp. 53-58, ene. 2006, doi: [10.3182/20060402-4-br-2902.00053](https://doi.org/10.3182/20060402-4-br-2902.00053).
- [7] M. Chaundhry, *Applied Hydraulic Transients*, Nueva York: Springer, 1979.
- [8] C. Verde, «Multi-leak detection and isolation in fluid pipelines», *Control Engineering Practice*, vol. 9, no. 6, pp. 673-682, jun. 2001, doi: [10.1016/s0967-0661\(01\)00026-0](https://doi.org/10.1016/s0967-0661(01)00026-0).
- [9] K. Zhou y J. C. Doyle, *Essentials of Robust Control*. 1998.
- [10] J. Rojas y C. Verde, «Adaptive estimation of the hydraulic gradient for the location of multiple leaks in pipelines», *Control Engineering Practice*, vol. 95, p. 104226, nov. 2019, doi: [10.1016/j.conengprac.2019.104226](https://doi.org/10.1016/j.conengprac.2019.104226).
- [11] H. A. Fernandez-Bobadilla, C. Verde, y J. A. Moreno, «High-Order Sliding Mode Observer for Outflow Reconstruction in a Branched Pipeline», *2021 IEEE Conference On Control Technology And Applications (CCTA)*, ago. 2018, doi: [10.1109/ccta.2018.8511545](https://doi.org/10.1109/ccta.2018.8511545).
- [12] M. A. Negrete y C. Verde, «Multi-leak Reconstruction in Pipelines by Sliding Mode Observers», *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 45, no. 20, pp. 934-939, ene. 2012, doi: [10.3182/20120829-3-mx-2028.00205](https://doi.org/10.3182/20120829-3-mx-2028.00205).
- [13] A. Gelb, *Applied optimal estimation.*, Cambridge: The MIT Press, 1974.
- [14] P. Dorato, V. Cerone, y C. Abdallah, *Linear Quadratic Control: An Introduction*. New Jersey: Prentice Hall, 1995.
- [15] K. Reif, F. Sonnemann, y R. Unbehauen, «An EKF-Based Nonlinear Observer with a Prescribed Degree of Stability», *Automatica*, vol. 34, no. 9, pp. 1119-1123, sep. 1998, doi: [10.1016/s0005-1098\(98\)00053-3](https://doi.org/10.1016/s0005-1098(98)00053-3).
- [16] J. Korbicz, J. M. Koscielny, Z. Kowalczyk, W. Cholewa, y J. Karbicz, *Fault Diagnosis: Models, Artificial Intelligence, Applications*. Germany: Springer, 2004.